شرط كورانت Courant، فريدريكس Friedrichs، ليوي Lewy[1]

بقلم: تيري جودون[2] Thierry Goudon

ترجمة: بعزيز سيهام

شعبان هجيرة

ريتشارد كورانت

ريتشارد كورانت[3] Richard Courant، وكورت فريدريكس[4] Kurt Friedrichs، وهانز ليوي[5] Hans Lewy هم ثلاثة رياضياتيين ألمان كانوا قد هاجروا إلى الولايات المتحدة الأمريكية في ثلاثينيات القرن الماضي بسبب تصاعد القوى النازية في أوروبا. وفي سنة 1928، نشروا مقالة بالغة الأهمية حول **تحليل المعادلات التفاضلية الجزئية وتقريباتها العددية**. كان البحث المنشور محطة بارزة لازالت بصمتها ظاهرة إلى اليوم في مسعى الرياضياتيين التطبيقيين المعاصرين. فقد صاغ هذا العمل شرطا ضروريا لا بد من قيامه لكي تنتج الخوارزمية الحسابية حلا ملائما، وهو معيار يُعرف الآن باسم "شرط كورانت–فريدريكس ليوي "ك‌ف‌ل" (CFL)".

---

[1] العنوان الأصلي للمقالة: QUOI MA CFL, QU’EST-CE QU’ELLE A MA CFL ?
موقعها: http://www.breves-de-maths.fr/quoi-ma-cfl-quest-ce-quelle-a-ma-cfl/

[2] انظر صفحته: http://www-sop.inria.fr/members/Thierry.Goudon/

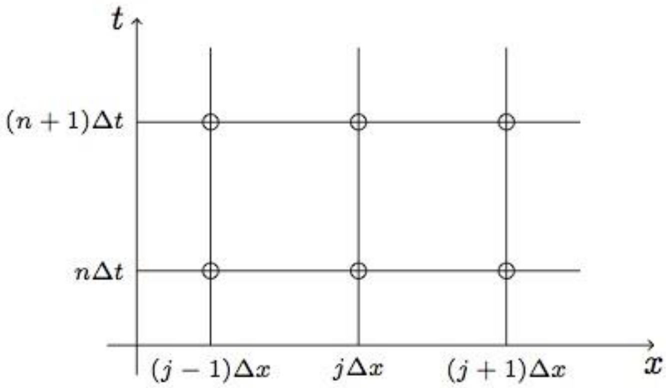
[3] انظر : https://fr.wikipedia.org/wiki/Richard_Courant

[4] انظر : https://fr.wikipedia.org/wiki/Kurt_Friedrichs

[5] انظر : http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lewy.html

لنأخذ على سبيل المثال معادلة الأمواج[6]. تصف هذه المعادلة تطور إشارة u –مرتبطة بمتغيّريْ الزمان t والمكان x– تنتشر بسرعة $c>0$. نحن نعرف كيف نعبّر عن حل هذه المسألة بدلالة الشروط الإبتدائية وذلك بواسطة صيغة بسيطة نسبيا تُعرف بصيغة دالمبير[7] D'Alembert. تخبرنا هذه الصيغة بوجه خاص أن الحل u عند النقطة (t,x) لا يتعلق سوى بالقيم التي تأخذها الإشارة في اللحظة $t=0$ في مواضع داخل المجال $[x-ct,x+ct]$.

ونظرا لوجود مثل هذه الصيغة، فقد يبدو من العبث البحث عن إعداد طريقة تقريب عددي لهذه المسألة. يبدو أن التطرق لحالات أكثر تعقيدا –مثل حالة المعادلة المعطاة في ساحة متعددة الأبعاد ذات شكل هندسي معقد، أو حالة تغيّر سرعة الانتشار، أو حالة وضعيات معروفة في علم الزلازل[8]– يستوجب اللجوء إلى الطريقة التقريبية. كما يقتضي الأمر المرور بمرحلة تمهيدية يتم خلالها التأكد من مصداقية الطريقة في الحالة البسيطة.



الشكل1: شبكة الزمكان بخطوة Δx ، Δt

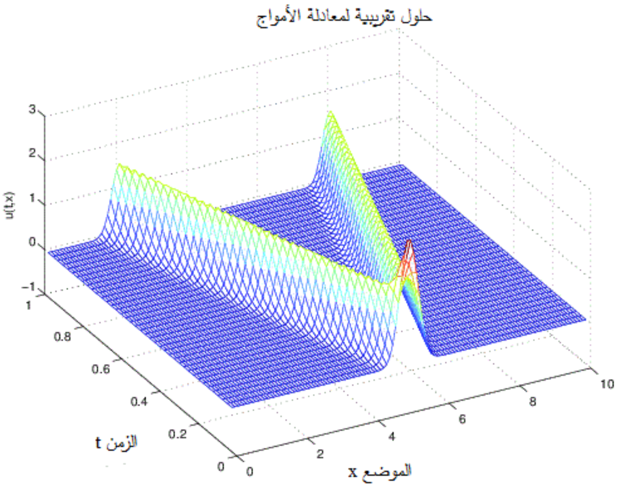
من شأن المخططات العددية أن تحدد الخوارزميات. والخوارزمية هي سلسلة من العمليات الأولية التي يمكننا إسنادها إلى الحاسوب بغرض إجراء حساب تقريبي لحل المعادلة. لكن الحاسوب لا يعالج إلا القيم "المتقطعة" التي يُطلب منها التقرّب من حل المسألة "المتصلة" انطلاقا من شبكة قيم زمكانية معرفة بخطوة زمنية $\Delta t > 0$ وخطوة مكانية $\Delta x > 0$ مثبتتين (انظر الشكل1). نلاحظ بخصوص الطريقة التي تم تحليلها من قبل كورانت وفريدريش وليوي أن المجهول العددي عند النقطة $(n\Delta t, j\Delta x)$ من هذه الشبكة لا يتعلق سوى بالقيم التي تأخذها الإشارة الابتدائية في موضع داخل

[6] انظر : http://math.univ-lyon1.fr/~benzoni/Ondes.pdf

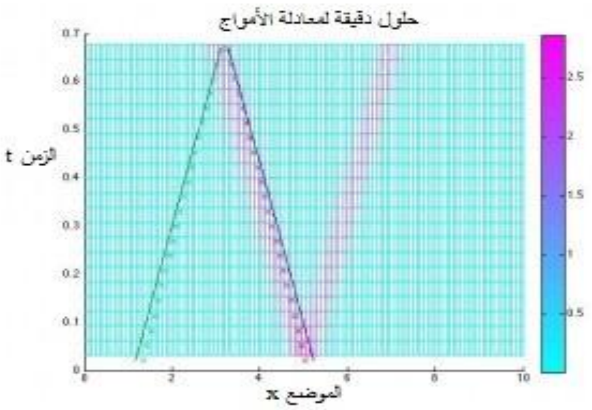
[7] انظر : http://www.breves-de-maths.fr/dalembert-et-les-equations-aux-differences-partielles/

[8] انظر : http://www.breves-de-maths.fr/imagerie-haute-resolution-du-sous-sol/

$\left[(j-n)\Delta x,(j+n)\Delta x\right]$. ينبغي أن يشمل هذا المجال المجال الحقيقي المعبّر عن الارتباط $\left[j\Delta x-cn\Delta t, j\Delta x+cn\Delta t\right]$، وهو ما يقتضي أن يكون $c\Delta t \leq \Delta x$.



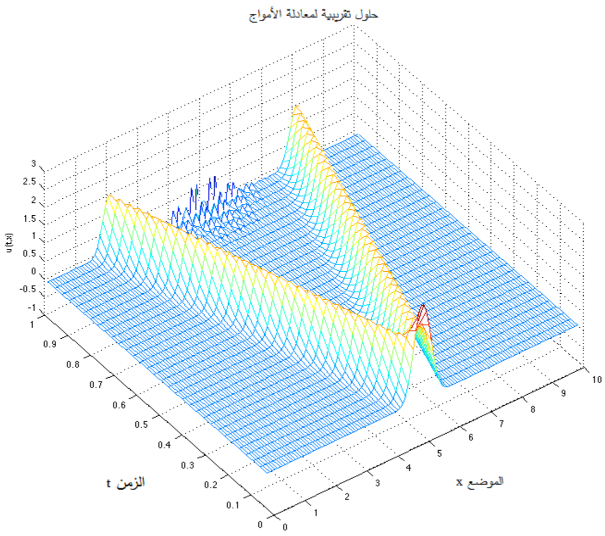
شكل 2: تطور الحل بدلالة المكان والزمان. شرط "كـفـل" (CFL) مُحقّق : يكاد الحل التقريبي يطابق الحل الدقيق.



الشكل 3: الشكل 2 "عندما يُشاهَد من الأعلى". تمثل المنطقة التي بين الخطوط الكاملة المجال الحقيقي للارتباط الخاص بالنقطة $x=3.5$، $t=0.7$. أما المنطقة الواقعة بين العلامات × فتمثل مجال الارتباط العددي.

توضِّح هذه الأشكال ما يحدث عندما يتحقَّق شرط "كـفـل" (انظر الشكلين 2-3) أو لا يتحقّق (انظر الشكل 4). إذا أردنا زيادة الدقة المكانية (هذا يعني اعتبار الخطوة Δx أقصر)، فيجب أيضا تصغير خطوة الزمن Δt... ومن ثمّ تطول مدة الحسابات لإجراء عملية محاكاة إلى غاية الزمن النهائي المحدد. وسيكون القيد أكثر شدة كلما كانت سرعة الانتشار c كبيرة. يرتبط هذا القيد مباشرة بكون المعادلة تصف **ظاهرة انتشار ذات سرعة منتهية**. فالقيد يعبّر عن معيار استقرار.

نشير إلى أن تحليل هذه القيود عندما يتعلق الأمر بمخططات ومسائل أكثر تعقيدا –كما هو الحال مثلا في ميكانيك الموائع[8]– يُعدُّ رهانا حاسما في الحساب العلمي يتطلب أدوات متطورة وفهما عميقا للمسألة الفيزيائية التي تقف وراءه.



الشكل 4: تطور الحل بدلالة المكان والزمان. شرط "ك ف ل" غير محقّق، والحل الناتج غير سليم.

للاستزادة:

- المقال الأصلي "On the Partial Difference Equations of Mathematical Physics" لـ
R. Courant, K. Friedrichs & H. Lewy, Mathematische Annalen 100, 32-74 (1928)
http://www.stat.uchicago.edu/~lekheng/courses/302/classics/courant-friedrichs-lewy.pdf
- R. Courant, H. Robbins, «What Is Mathematics ? An Elementary Approach to Ideas and Methods », Oxford University Press (1996)
https://global.oup.com/academic/?cc=dz&lang=en&
- نص عن ريتشارد كورانت Richard Courant وإنجازاته.
http://images.math.cnrs.fr/L-Institut-Courant-de-Sciences.html
- 4 مقالات قصيرة من نفس السلسلة:

- Voir au centre de la Terre
http://www.breves-de-maths.fr/jeter-un-oeil-au-centre-de-la-terre/
- L’imagerie du sous-sol
http://www.breves-de-maths.fr/imagerie-haute-resolution-du-sous-sol/
- Des tourbillons qui font tourner la tête
http://www.breves-de-maths.fr/des-tourbillons-qui-font-tourner-la-tete/
- Des vagues hors du commun
http://www.breves-de-maths.fr/des-vagues-hors-du-commun/

[8] انظر : http://www.breves-de-maths.fr/des-tourbillons-qui-font-tourner-la-tete/

مصدر الصور: Wikimedia/Thierry Goudon