Mohammed Hazi

Topologie
Au delà des Travaux Dirigés

Tome 2
Visite guidée dans les espaces métriques

2ème année des universités et Grandes Ecoles

Au collègue et ami

Dr. M'barek Ben Wassel El Hazimi

Doyen de la faculté de Rafha
(Arabie Saoudite)

Pour les moments agréables passés en sa compagnie.

Du même auteur à l'Office des Publications Universitaires et Casba Editions **:**

A. Traduction

1. Cours d'algèbre linéaire
2. Algèbre linéaire
3. Introduction à la topologie générale
4. Algèbre I: Rappels de cours et exercices corrigés
5. Problèmes et exercices résolus (M001 + M002)
6. Séries et Intégrales
7. Matrices: Cours et Problèmes
8. Cours de topologie
9. Equations de la physique mathématique, tome 1
10. Equations de la physique mathématique, tome 2
11. Atlas des mathématiques

B. Auteur

1. Espaces topologiques en général et espaces métriques en particulier

2. المختصر في الطبولوجيا

3. Introduction aux espaces normés

4. الفالج المقروض في الامتحانات والفروض (الجزء الأول)

5. الفالج المقروض في الامتحانات والفروض (الجزء الثاني)

6. السبيل إلى الأعداد الحقيقية

7. S.E.M 300 par ses examens (tome1)
8. S.E.M 300 par ses examens (tome2)
9. Topologie : Au delà des travaux dirigés;
   tome 1: Visite guidée dans les espaces topologiques.

10. الطلع النضيد للطالب والمعيد

Avertissement

215 Exercices et Problèmes sont traités dans ce second tome. Ils étalent d'une manière déguisée une vue globale sur la théorie des espaces métriques. En réalité, tout est ramené sous le sobriquet d'exercice. Tout est, peut être, à la joie de certains étudiants de ces dernières années que la terminologie étoffée de théorème, proposition, lemme, etc, affolent. Les autres n'en tireront pas moins grand profit en s'entraînant à les résoudre.

Quatre parties le charpentent :

Définitions et propriétés générales, Convergence et Continuité, Compacité et connexité et enfin, Convergences dans des espaces fonctionnels.

Un chapitre est consacré à chacune d'elles:

La première est couverte par 43 exercices (1 à 43),

La seconde est couverte par 81 exercices (44 à 124),

La troisième est couverte par 46 exercices (125 à 170),

La quatrième est couverte par 45 exercices (171 à 215).

Nous y avons pris soin de rappeler les définitions fondamentales de chaque notion introduite et veillé à varier et détailler, autant que faire ce peut, les démonstrations et diverses illustrations afin d'assurer à l'utilisateur un accès facile et attrayant.

C'est aussi une occasion de revisiter mes ouvrages "Espaces topologiques en général et espaces métriques en particulier" et "Introduction aux espaces normés", ainsi que leur version arabe, qui ont vu le jour sous les presses de l'Office des Publications Universitaires, il y a maintenant plus treize ans. L'essentiel du présent livre, y est puisé. Mes tentatives auprès de cet organisme pour susciter une deuxième chance de réédition de ces ouvrages, qui m'offrirait l'occasion de les corriger et les améliorer, sont restées vaines. C'est là une autre raison d'être de ce travail.

Rafha le 4 avril 2007
Mohammed Hazi

Introduction

Nous nous apprêtons à présent, à exposer les espaces métriques. Ces espaces, dont l'apparition à la fin du 19ème siècle répondait à l'exigence d'une rigueur croissante à l'essor grandissant qu'ont connu, notamment, les notions d'espaces, de suites et de fonctions continues, sont venus mettre un frein aux nombreuses erreurs et contradictions dans plusieurs domaines de l'analyse, tels que ceux cités.

C'est ainsi qu'est apparue la notion précise de distance et d'espace métrique due principalement à Fréchet[1]. Cet outil fondamental répondait aux besoins pressants de cerner la notion de voisinage et de proximité, laquelle permettait de donner une caractérisation rigoureuse de la notion de suites convergentes et de fonctions continues.

Ces espaces forment, comme nous le verrons, une catégorie particulière d'espaces topologiques. De ce fait, il importe beaucoup de remarquer que toutes les notions et diverses définitions traitées dans le premier tome restent valables et gardent, ici, leurs fonds. Leurs formes peuvent connaître des changements au gré des outils nouveaux qui apparaîtront. Nous nous attellerons à mettre en relief, et chaque fois que nous aurons l'occasion, les propriétés et les caractéristiques propres aux espaces métriques.

L'une de ces principales caractéristiques de ces espaces est qu'ils sont, par essence, liés à $\mathbb{R}$, de par la définition de l'outil de base leur donnant naissance: la distance. D'ailleurs, cela a été vu comme une tare par certains mathématiciens, qui ont cherché à se débarrasser de cette dépendance. Les espaces topologiques ont répondu à cette exigence.

Ainsi, et abstraction faite du premier chapitre consacré à la construction de topologies associées à des distances, et du dernier réservé aux espaces fonctionnels la totalité des autres chapitres restants reprend les notions vues lors de l'étude précédente et les expose dans leur nouveau cadre. Nous pouvons citer les notions de convergence, continuité, compacité, connexité, etc.

1. Maurice René Fréchet est un mathématicien Français, né le 2 septembre 1878 à Maligny et mort le 4 juin 1973 à Paris. C'est en 1906 qu'il a introduit la notion d'espace métrique, (l'appellation d'espace métrique étant due à Hausdorff).

Un mot d'Histoire

Il n'est guère aisé de donner une définition du mot topologie dans des termes qui, habituellement, permettent à l'étudiant, dans d'autres contextes, de saisir le sens des notions nouvelles qui se présentent à lui.

C'est un domaine extrêmement vaste des mathématiques dont il est difficile de définir avec exactitude l'objet dont il fait l'étude. Ce que nous pouvons dire dans un premier temps, c'est que la topologie est très intimement liée à la théorie des ensembles, à l'analyse fonctionnelle, aux suites et séries, aux calculs intégral, différentiel et vectoriel à la géométrie et encore beaucoup d'autres domaines. Voici cependant un essai de définition de la topologie qui reste toujours à compléter.

Vu sous l'angle linguistique, ce terme (du grec) signifie étude des lieux. Les mathématiciens l'ont adopté pour désigner une branche de la géométrie s'intéressant à définir ce qu'est qu'un lieu et à la position d'une chose géométrique par rapport à d'autres, sans prêter attention ni à sa forme ni à son volume.

En réalité l'émergence de cette branche des mathématiques remonte au milieu du dix-neuvième siècle. Elle a pris la forme d'une nouvelle orientation de la géométrie analytique. Möbius[2] est le premier à faire les premiers pas dans cette branche. Il est suivi de Listing[3] qui, dans sa lettre de 1836, a utilisé pour la première le mot
topologie. Plus tard, en 1847, il publia son ouvrage "*Vorstudien zur Topologie*", qui fut le premier à introduire le terme *Topologie*. Riemann[4] est considéré par un grand public de mathématiciens comme le fondateur de la topologie. Il est le premier à essayer de cerner la notion d'espace topologique et de poser les premiers jalons des techniques ayant aidé à l'évolution et développement de cette branche.

L'étude des ensembles numériques, en particulier celui des réels, avec l'avènement des intervalles ouverts et des intervalles fermés, dans la deuxième moitié du dix-neuvième siècle, a permis de donner un nouvel essor à la théorie générale des espaces topologiques telle qu'elle est décrite par Riemann.

Cantor[5], l'inventeur de la théorie des nombres, vient en tête des mathématiciens qui se sont illustrés dans ce domaine. C'est lui qui a posé la définition d'un ensemble ouvert, d'un ensemble fermé et du point d'accumulation sur la droite réelle.

Hilbert[6] est, quant à lui, le premier à utiliser la notion de voisinage.

---

2. August Ferdinand, Möbius est mathématicien et astronome Allemand, né le 17 novembre 1790 à Schulporta et mort le 26 septembre 1868 à Leipzig. Il a laissé beaucoup d'objets mathématiques, comme la fonction et la formule d'inversion qui portent son nom.

3. Johann Benedict, Listing est mathématicien Allemand, né le 25 juillet 1808 à Frankfurt et mort le 24 décembre 1882 à Göttingen. Il a étudié sous Gauss et s'est intéressé à la topologie sous les conseils de ce dernier.

4. Bernhard, Riemann est mathématicien Allemand, né le 17 septembre 1826 à Hanovre et mort le 20 juillet 1866 à Selasca (Italie). Sa thèse, préparée sous la direction de Gauss et soutenue en 1851, portait sur la théorie des fonctions d'une variable complexe, dont il s'intéresse particulièrement aux propriétés géométriques.

5. Georg Cantor est né le 3 mars 1845 à St-Petersburg et mort le 6 janvier 1918 à Halle. Brillant mathématicien Russe, il étudia en Allemagne sous Weierstrass et Kronecker. Ses travaux l'ont conduit, en 1872, à introduire la notion de nombre réel, comme limite d'une suite de nombres rationnels.

6. David Hilbert, mathématicien Allemand, né le 23 janvier 1862 à Königsberg (actuelle Russie) et mort le 14 février 1943 à Göttingen (Allemagne), est l'un des plus grands mathématiciens du 20ème siècle. Son œuvre est immense. Au

A l'orée du vingtième siècle, autour de l'année 1914 précisément, Hausdorff [7]a pu simplifier, sur la base des travaux de Fréchet sur les espaces métriques, la "forêt" d'axiomes qui entouraient la notion de topologie et a réussi à en extraire trois, portant son nom, qui sont les plus usutés à ce jour. C'est, à ce titre, le père fondateur de la théorie de la topologie.

Bien entendu, et comme toute science, la topologie a connu un développement rapide et une extension à plusieurs autres branches des mathématiques, dépassant toutes les prévisions de ses concepteurs. C'est ainsi que sont nées la topologie algébrique et la topologie différentielle entre autres. Bien plus, elle jouit de ramifications en algèbre, où on parle de groupes et anneaux topologiques. Quant à l'analyse, son emprise est totale: presque aucune étude ne peut se passer d'outils topologiques lui conférant précision et ... beauté !

second congré international des mathématiques de Paris, le 8 août 1900, Hilbert a posé 23 Problèmes qui ont été le moteur de plusieurs recherches tout au long du siècle dernier. Le nom de Hilbert est cependant connu des étudiants surtout pour ses célèbres "espaces de Hilbert", qu'il a introduits vers 1909.

7. Félix, Hausdorff est mathématicien Allemand, né le 8 novembre 1868 à Breslau (actuelle Pologne) et mort le 26 janvier 1942 à Bonn. Il est considéré comme l'un des fondateurs de la topologie moderne. Il a contribué significativement à la théorie des ensembles et à l'analyse fonctionnelle. Il est l'auteur de plusieurs travaux philosophiques et littéraires.