

محمد حازي

مبادئ مفتاحية
في
مفاهيم طبولوجية

مدجّن بتمارين محلولة

و

ومحصّن بأخرى للبحث

للسنتين الأولى والثانية

من المرحلة الأولى الجامعية

.1

للمؤلف في ديوان المطبوعات الجامعية:

أ. في التأليف:

1. Espaces topologiques en particulier et espaces métriques en général
2. المختصر في الطوبولوجيا
2. Introduction aux espaces normés
3. السبيل إلى الأعداد الحقيقية.
4. الفالج المقروض في الامتحانات والفروض، الجزء الأول.
5. الفالج المقروض في الامتحانات والفروض، الجزء الثاني.
3. S.E.M 300 par ses Examens, tome 1.
4. S.E.M 300 par ses Examens, tome 2.
5. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 1:
Visite guidée dans les espaces topologiques.
6. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 2:
Visite guidée dans les espaces métriques.
7. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 3:
Visite guidée dans les espaces normés.

ب. في الترجمة:

6. معادلات الفيزياء الرياضية، الجزء الأول.
7. معادلات الفيزياء الرياضية، الجزء الثاني.
8. دروس في الطوبولوجيا.
9. سلاسل وتكاملات.
10. المصفوفات: دروس ومسائل.
11. مسائل وتمارين محلولة.
12. مدخل إلى الطوبولوجيا العامة.
13. دروس في الجبر الخطي.
14. الجبر الخطي.
15. الجبر I: تذكير بالدروس وتمارين محلولة.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

إلى

روح بابا علي

ظلّ اليتامى وملاذ الحيارى

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

0 تصدير

1.0 مدخل

يعدّ الكتاب الحاضر اللبنة الأولى من صرح ذي ثلاثة طوابق:

مبادئ مفاتيحية في مفاهيم طبولوجية،

الدروس الوافية في الفضاءات المترية،

المقعد المجلي للتحليل الدالي.

يطمح بمعية الاثنيين الآخرين إلى تسليط نظرة متفحصة ماحصة على المقياس الهامّ المعنون بالطبولوجيا والمتداول في مناهج أغلب الفروع العلمية الجامعية.

يتناول الكتاب الأول، موضوع الدراسة الحالية، خمسة فصول هي:

الفصل الأول: الطبولوجيا الاعتيادية لمجموعة الأعداد الحقيقية،

الفصل الثاني: الفضاءات الطبولوجية: تعاريف وخصائص أساسية،

الفصل الثالث: الاستمرار،

الفصل الرابع: التراص،

الفصل الخامس: الترابط.

ذيلنا كلّ فصل بمجموعة من مسائل وتمارين محلولة وأخرى للبحث، يفوق عددها في الإجمال المائة والثلاثين. عمدنا إلى فتح نافذة على التاريخ ووضع دليل للمصطلحات وآخر للرياضياتيين المذكورين في سياق الكتاب.

حرصنا في وضع هذه الدروس على التفصيل في البراهين والتنويع في الأمثلة، لزيادة مرجوة في الإيضاح وإلمام أوسع بالمفاهيم. نأمل أن تكون للمقبلين عليها ميسورة ومشوقة.

إنّ من طبيعة الأعمال، لا سيما العلمية منها لدى البشر، ألا ترقى إلى الكمال، مهما اشتدّ الحرص على إتقانها واجتمعت كلّ الأسباب دونها وحازت على النصيب الأوفر من عزائم أصحابها. إنّها تظلّ ناقصة، تستدعي جوانب منها، على الدوام، تدقيقاً وتنويراً. لذا، أوّجّه دعوتي إلى كلّ الزملاء والمستخدمين للاهتمام بالكتاب وتقديم إرشاداتهم، شاكرًا لهم صنيعهم سلفاً. ستسمح لي ملاحظاتهم وإرشاداتهم بتقويم العمل وتثمين المسعى.

سمّاش في 14 نوفمبر 2009

2.0 نافذة على التاريخ

يشدّ مفهوم الطوبولوجيا عن باقي المفاهيم الرياضياتية في وضع تعريف صريح له، يوضّح معناه ويفسّر أهدافه ومراميه بكلمة تحدّده وترادفه على غرار ما هو مألوف ومتداول لدى كثير من المفاهيم. ما يمكن قوله في الوهلة الأولى، إنّ ميدان متشعب من الرياضيات وثيق الارتباط بنظرية المجموعات والتحليل الداليّ والحسابين التكامليّ والتفاضليّ والهندسة وكثير من الميادين الأخرى. ومع ذلك، إليك هذه المحاولة لتعريف الطوبولوجيا، الذي يبقى على الدوام يتطلّب الإتمام.

يفيد لفظ "الطوبولوجيا" هذا، من المنظور اللغويّ اليونانيّ علم المكان وظّفه الرياضياتيون لتعيين فرع من فروع الهندسة، يهتمّ بتعريف معنى المحلّ (أو الموضع) ووضع كائن هندسيّ بالنسبة إلى آخر، دونما اكتراث بشكله وحجمه ونوعه وعدده ولا بأية اعتبارات أخرى.

يعود طفوّ هذا الفرع من الرياضيات إلى منتصف القرن التاسع عشر حيث اتخذ شكل منحى جديد للهندسة التحليلية. يكون الرياضياتيّ موبوس¹ الأول الذي وضع البصمات الأولى عليه. غير أنّ فضل السبق في إطلاق لفظ طوبولوجيا يرجع إلى الرياضياتيّ الألمانيّ ليستينغ² عام 1836. وتعدّ السنة 1860 العام الذي شهد البداية الفعلية لعلم الطوبولوجيا لدى المدرسة الألمانية، من خلال أعمال الرياضياتيّ فيرشتراس³ حول مفهوم النهاية عند الدوال العددية. ينفرد من هذه المدرسة الرياضياتيّ ريمان⁴. فقد سمحت أعماله في الدوال العقدية وهندسة السطوح في لفت الأنظار إلى أهمية الأفكار الطوبولوجية.

رأى الرياضياتيّ كانتور⁵، وهو منشغل بدراسة المجموعات الجزئية للفضاءات الإقليدية، ضرورة إيراد مفهوم المسافة بين نقاط هذه الفضاءات. ويعتبر من الأوائل الذين قدّموا المفاهيم القاعدية للطوبولوجيا، مثل المغلفات والمفتوحات والنهاية على المستقيم الحقيقيّ. عرفت أفكاره في البداية معارضة شديدة من قبل بعض الرياضياتيين

1. August Ferdinand Möbius : رياضياتيّ وفلكيّ ألمانيّ. ولد في 17 نوفمبر 1790 بشوليبورتا ومات في 26 سبتمبر 1868 بلايبزيف. درس على يد فاووس وترك العديد من الأدوات الرياضياتية كالدالة ودستور القلب اللتين تحملان اليوم اسمه.

2. Johann Benedict Listing : رياضياتيّ ألمانيّ. ولد في 25 جويلية 1808 بفراנקفورت ومات في 24 ديسمبر 1882 بفوتن فان. نصحه أستاذه قوص بدراسة الطوبولوجيا ومكّنه بالظفر بمكانة ضمن حلقة أصدقائه الضيقة.

3. Karl Theodor Weierstrass : رياضياتيّ ألمانيّ. ولد في 31 أكتوبر 1815 بأستنفيلد ومات في 19 فيفري 1897 ببرلين. من ضمن أعماله الرياضياتية نظرية الدوال الأبلية والتحليلية. يذكر له التاريخ أنّه عارض زميله وصديقه كرونكر حول اكتشافات كانتور المثيرة.

4. Bernhard Riemann : رياضياتيّ ألمانيّ. ولد في 17 سبتمبر 1826 بهانوفر ومات في 20 جويلية 1866 بسيلاسكا بايطاليا. فحص الجوانب الهندسية لدى الدوال ذات متغيّر عقديّ. شكّل هذا العمل فحوى موضوع رسالة الدكتوراه التي حضرها تحت إشراف فاووس وناقشها عام 1851.

5. Georg Ferdinand Cantor : رياضياتيّ لامع من أصل روسيّ. ولد في 3 مارس 1845 بسان بترسبورغ ومات في 6 جانفي 1866 بهال. درس بألمانيا على يد فيرشتراس وكرونكر. قادته أعماله عام 1872 إلى إدخال مفهوم العدد الحقيقيّ كنهاية لمتتالية ناطقة. له العديد من الاكتشافات في نظرية الأعداد. أحدثت هذه الاكتشافات ضجة في تلك الفترة وسببت له متاعب جمّة مع معاصريه من الرياضياتيين يتقدّمهم كرونكر وبوانكريه. وكانت هذه القلاقل وراء إتلاف صحّته.

الذين عاصروه. ثم سرعان ما انتشرت والترجم بها وطورها عدد من أبرز رياضياتي المدرسة الإيطالية، في مقدمتهم أسكولي⁶ وأرزيلا⁷ وفولتيرا⁸؛ والمدرسة الفرنسية من خلال أعمال بوانكاريه⁹ وهدمار¹⁰ وبوريل¹¹ ولوبيف¹². توج هذه الجهود الرياضياتي فريشيه¹³ الذي توصل، من خلال أطروحته عام 1906، إلى وضع ما شاعت تسميته اليوم بالفضاء المترّي.

في مطلع القرن العشرين وانطلاقا من أعمال فريشيه، تمكّن الرياضياتي الألماني هوسدورف¹⁴، في حدود العام 1914، من اختزال لفيق المسلمات التي كانت تحيط بمفهوم الطوبولوجيا، مستخرجا منها ثلاثا، تحمل اسمه، هي المتداولة إلى اليوم. وبأعمال هوسدورف وغيره من أمثال هيلبرت¹⁵، أخذ هذا العلم في التطور والتشعب بين مختلف بطون الرياضيات إلى أن بلغ درجة فاقت تصورات واضعيه. أدرك الجبر فاستحدث فيه فروعا نذكر منها الزمر والحلقات الطوبولوجية؛ وأحكم سيطرته على التحليل، فلا تكاد دراسة فيه تخلو من أدوات طوبولوجية تضفي عليها دقة ورونقا ...

6. Giulio Ascoli : رياضياتي إيطالي. ولد في 20 جانفي 1843 بترياست ومات في 12 جويلية 1896 بميلاند له مساهمة ثرية في نظرية الدوال ذات متغير حقيقي وفي سلاسل فوريي .
7. Cesare Arzelà : رياضياتي إيطالي. ولد في 6 مارس 1847 بسانتو ستيفانو دي ماغرا ومات بها في 12 مارس 1912. ترك أثرا في متتاليات الدوال.
8. Vito Volterra : رياضياتي إيطالي. ولد في 3 ماي 1860 بأنكونا ومات في 11 أكتوبر 1940 بروما. كان وراء فكرة التحليل الدالي التي طورها هدمار. من أشهر أعماله ذلك المنشور 1896 حول المعادلات التكاملية والذي ضمنه المعادلة التي تحمل اليوم اسمه.
9. Jules Henri Poincaré : رياضياتي وفيزيائي وفيلسوف فرنسي لامع. ولد في 29 أبريل 1854 بنانسي ومات في 17 جويلية 1912 بباريس. غيرت أعماله وجه رياضيات عصره وأحدث بالخصوص ثورة في دراسة حلول المعادلات التفاضلية.
10. Hadamard Salomon Jacques : رياضياتي فرنسي. ولد في 8 ديسمبر 1865 بفرساي ومات في 17 أكتوبر 1963 بباريس. يعدّ من الأوائل الذين أسسوا للنظرية العامة للدوال التحليلية بعد بحث في الدوال العقدية المعرفة وفق سلاسل تايلورية. شكّل له هذا العمل موضوع رسالة الدكتوراه التي ناقشها عام 1892.
11. Emile Borel : رياضياتي فرنسي. ولد في 7 جانفي 1871 بسانت أفريك ومات في 3 فيفري 1956 بباريس. يعتبر، إلى جانب بير ولوبيف، مؤسس نظرية القياس والدراسة العصرية للدوال. له مساهمة كبيرة في تطوير حساب الاحتمالات.
12. Henri Léon Lebesgue : رياضياتي فرنسي. ولد في 28 جوان 1875 ببوفيه ومات في 26 جويلية 1941 بباريس. قدم عام 1902 نظرية تكامل جديد يحمل اليوم اسمه.
13. Maurice René Fréchet : رياضياتي فرنسي. ولد في 2 سبتمبر 1878 بماليني ومات في 4 جوان 1973 بباريس. أدخل مفهوم الفضاء المترّي عام 1906. أسس لنظرية الفضاءات المجردة وله عدّة إسهامات في الإحصاء وحساب الاحتمالات.
14. Félix Hausdorff : رياضياتي ألماني. ولد في 8 نوفمبر 1868 ببريسلو (بولونيا الحالية) ومات في 26 جانفي 1942 ببون. يعتبر أحد مؤسسي الطوبولوجيا الحديثة. ساهم بفعالية في بعث نظرية المجموعات والتحليل الدالي. له العديد من المؤلفات الفلسفية والأدبية.
15. David Hilbert : رياضياتي ألماني من أبرز رياضياتي القرن العشرين. ولد في 23 جانفي 1862 بكونيسبيرغ (روسيا الحالية) ومات في 14 فيفري 1943 بڤوتينفان. له تركة علمية ثقيلة. من ضمنها المسائل الثلاث والعشرين التي أعلن عنها يوم 8 أوت 1900 في مؤتمر الرياضيات العالمي الثاني بباريس والتي كانت المحرك الأساسي لكثير من البحوث طيلة القرن الماضي. اقترن اسمه بالفضاءات التي أدخلها في غضون 1909 من خلال عمله على معادلات تكاملية.