

Mohammed Hazi

De mes cahiers d'analyse ...

Tout sur \mathbb{R}
Ensemble des nombres réels:
Structures algébrique et topologique
Cours détaillé et exercices résolus

Pour le premier cycle des Universités et Grandes Ecoles.



**A mon premier petit-fils,
qui remplit la maison de gaité et de bonheur :**

Akram

Et

**A mon frère Dahmane,
rappelé à Dieu ce triste jour du 16-11-2014**

Aveu de reconnaissance

Les cours exposés à travers ce premier cahier et les six à venir sont le fruit de plusieurs années de participation à des staffs d'encadrement de la première année des quatre Grandes Ecoles :

Ecole Normale Supérieure de Vieux Kouba, Alger ;

Ecole Nationale des Travaux publics de Kouba, Alger ;

Ecole Nationale Polytechnique d'El Harrach, Alger ;

Ecole Nationale de Préparation aux Etudes d'Ingénieur de Rouiba, Alger.

C'est une nouvelle belle occasion qui s'offre à moi pour dire, encore une fois, ma gratitude pour tout collègue ayant souffert le martyr avec moi au service des étudiants en général et ceux de première année en particulier. Je les salue très bas pour les efforts fournis, les sacrifices consentis et les difficultés surmontées afin de dompter la matière et la murir pour la faire parvenir aux étudiants aussi pure que complète.

Je me contente de citer les têtes des équipes sans que cela diminue d'un iota du rôle de tous les autres membres, très nombreux. Si l'exiguïté du cadre en a décidé ainsi, ils sont en revanche assurés de leur place indétronable à travers le temps dans mon cœur. Je les remémore toujours avec une affection sans borne et une reconnaissance infinie :

Mr. Youcef Atik de l'ENS de Vieux-Kouba,

Mr. Cherif Bouzidi de l'ENTP de Kouba;

Mr. Brahim Kacha de l'ENP d'El Harrach;

Mr. Messaoud Djebarni de l'ENPEI de Rouiba.

Notes introductives

« *Le concret, c'est de l'abstrait rendu familier par l'usage.* »

Paul Langevin

L'une de toutes premières questions qui taraudent l'esprit de l'étudiant abordant un nouveau champ conceptuel est de se demander le pourquoi de celui-ci et le comment de son ancrage dans le panier de ses acquis. C'est ce qu'il y a de plus naturel et c'est sain. Parmi toutes les raisons de cette étude de \mathbb{R} , deux nous paraissent essentielles et déterminantes.

La première est pédagogique et a trait au programme de première année universitaire « scientifique » ayant pour but, dans sa majeure partie, l'étude des fonctions réelles d'une variable réelle. Celle-ci est déjà bien entamée dans la dernière marche du palier Secondaire. Il y a là comme une redécouverte de plusieurs notions familières qui incite l'implication active de l'étudiant et permet une amorce fructueuse de ses études.

La seconde réside dans la spécificité de \mathbb{R} lui-même et la place particulière, à nulle autre comparable, qu'il s'adjuge dans le monde mathématique. Il est son premier grand portail. On le trouve central dans la majorité de ses branches, l'analyse notamment. Celle-ci y puise pratiquement toutes ses « ressources ». Que serait-elle sans lui ? Nul ne peut prétendre y faire un pas sans l'emprunter. S'abreuver à sa source donne une assise solide pour un bon envol futur dans les cieux exaltants et magiques des démonstrations où règnent la rigueur et l'abstraction. De ce fait, il est incontournable pour le large jeune public arrivant du Secondaire pour se débarrasser des relents de ses preuves intuitives et rudimentaires ; à telle enseigne que ne nous pouvons nous empêcher de crier « Tous sur \mathbb{R} ! ».

Le départ de cette expédition est donné des **relations** où sont détaillées les propriétés des fonctions et applications ainsi que les notions de **relations d'équivalence et d'ordre** (chapitre un). Un premier arrêt est observé sur le premier ensemble numérique, en l'occurrence **l'ensemble des entiers naturels** \mathbb{N} . Nous avons jugé propice de prolonger cet arrêt afin d'étaler la notion de **dénombrabilité**, intimement liée à \mathbb{N} (chapitre deux).

Dans la troisième étape, laquelle peut paraître en dehors du circuit de notre entreprise, on trouve une introduction à **l'analyse combinatoire** ; celle-ci puisant ses outils et ses propriétés des deux premiers chapitres (chapitre trois).

La marche est reprise pour arriver aux deux ensembles \mathbb{Z} des **entiers relatifs** et \mathbb{Q} des **nombres rationnels**, lesquels constituent la matière du chapitre quatre. L'avant dernière étape est consacrée à **l'introduction axiomatique de l'ensemble des nombres réels** (chapitre cinq). La randonnée s'achève par l'étude détaillée de la **structure topologique usuelle** de cet ensemble (chapitre six).

Pour apprécier cette marche et la rendre accessible, voire agréable, on a pas lésiné sur les moyens à même d'apporter la clarté boostant la compréhension et assurant l'assimilation. C'est dans cette optique qu'il est fait appel à beaucoup d'exemples d'illustration et exercices de consolidation dont certains résolus et d'autres laissés comme compléments pour évaluation et agrément.

En guise d'épilogue, il nous semble grandement utile, et c'est d'usage, de saisir cette tribune pour rappeler à l'étudiant que comprendre, apprendre et appliquer de nouvelles notions nécessite une ébauche d'efforts à ne plus en compter. Pour cela, il y a lieu de lui rappeler trois qualités (sonnant socialement parfois comme des tares) devant lui coller comme son ombre :

- S'armer d'une **curiosité** farouche pour ne laisser aucune piste pour récolter ou confronter une information en variant ses sources (enseignants, ouvrages, internet... etc.)

- Etre animé d'une **hargne** et d'un **entêtement** à même de ne lâcher aucune question sans l'élucider quel que soit l'effort physique temporel ou matériel consenti. Ne jamais évacuer des questions en suspens sans s'y cramponner jusqu'à les mener à leur terme.

- Etre habité d'une **voracité** insatiable en s'abstenant de compter le nombre de problèmes et exercices effectués ou de livres consultés et avoir l'envie vivace de toujours en faire et consulter davantage.

Je me dois pour conclure de dire ma conviction profonde que le présent travail ne peut avoir l'impact escompté auprès de ses utilisateurs s'il ne suscite pas l'intérêt et l'adhésion de ces derniers. C'est avec leur implication par des critiques et suggestions[↓] qu'il peut s'améliorer et être plus utile.

[↓] Il suffit d'un clic à cette adresse : mohammed.hazi1979@gmail.com