Mohammed Hazi

De mes cahiers d'analyse …

Intégrale de Riemann,
Calcul de primitives,
Intégrales impropres.

Cours détaillé et exercices résolus

Pour le premier cycle des Universités et Grandes Ecoles.

Du même auteur à l'Office des Publications Universitaires :

1. Espaces topologiques en général et espaces métriques en particulier.
2. المختصر في الطبولوجيا.
3. Introduction aux espaces normés.
4. السبيل إلى الأعداد الحقيقيّة.
5. الفالج المقروض في الامتحانات والفروض، الجزء الأوّل.
6. الفالج المقروض في الامتحانات والفروض، الجزء الثاني.
7. S.E.M 300 par ses Examens, tome 1.
8. S.E.M 300 par ses Examens, tome 2.
9. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 1: Visite guidée dans les espaces topologiques.
10. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 2: Visite guidée dans les espaces métriques.
11. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 3: Visite guidée dans les espaces normés.
12. مبادئ مفتاحيّة في مفاهيم طبولوجيّة.
13. الدروس الوافية في الفضاءات المتريّة.
14. المقعّد المجلّي للتحليل الداليّ.
15. من دفاتر التحليل: المتتاليات العدديّة.
16. من دفاتر التحليل: الدوال الحقيقيّة ذات متغيّر حقيقيّ: نهاياتها واستمرارها.
17. من دفاتر التحليل: الاشتقاق والنشور المحدودة لدى الدوال الحقيقيّة ذات متغيّر حقيقيّ: تقعيد نظريّ وتطبيقات.
18. من دفاتر التحليل: التكامل الريماني وحساب الدوال الأصليّة: شقّ نظريّ وآخر تطبيقيّ.
19. من دفاتر التحليل: المعادلات التفاضلية العادية من الرتبتين الأولى والثانية: تقعيد نظريّ وتطبيقات.
20. من دفاتر التحليل: الدوال ذات عدّة متغيّرات حقيقيّة: نهاياتها واستمرارها وقابليتها للمفاضلة و... دروس مفصّلة وتمارين منوّعة.
21. De mes cahiers d'analyse : Tout sur $\mathbb{R}$: Structures algébrique et topologique. Cours détaillé et exercices résolus.
22. De mes cahiers d'analyse : Suites numériques. Cours détaillé et exercices résolus.
23. De mes cahiers d'analyse : Fonctions réelles d'une variable réelle : Limites, continuité … Cours détaillé et exercices résolus
24. De mes cahiers d'analyse : Fonctions réelles d'une variable réelle : dérivabilité, dérivées et développements limités. Cours détaillé et exercices résolus

En traduction vers l'arabe :

1. Equations de la physique mathématique (deux tomes).
2. Cours de topologie.
3. Séries et intégrales.
4. Matrices : Cours et problèmes.
5. Problèmes et exercices résolus.
6. Introduction à la topologie générale.
7. Cours d'algèbre linéaire.
8. Algèbre linéaire.
9. Algèbre I ; Rappels de cours et exercices résolus.
10. Atlas des mathématiques.

A mon frère Hocine dit ...
Aissa!
Qu'Allah accueille Dahmane dans son vaste paradis!

0.0 Aveu de reconnaissance

Les cours exposés à travers ce cinquième cahier, les quatre parus et les deux à venir, sont le fruit de plusieurs années de participation à des staffs d'encadrement de la première année des quatre Grandes Ecoles :

Ecole Normale Supérieure de Vieux-Kouba, Alger ;
Ecole Nationale des Travaux publiques de Kouba, Alger ;
Ecole Nationale Polytechnique d'El Harrach, Alger ;
Ecole Nationale de Préparation aux Etudes d'Ingénieur de Rouiba, Alger.

C'est une nouvelle belle occasion qui s'offre à moi pour dire, encore une fois, ma gratitude pour tout collègue ayant souffert le martyr avec moi au service des étudiants en général et ceux de première année en particulier. Je les salue très bas pour les efforts fournis, les sacrifices consentis et les difficultés surmontées afin de dompter la matière et la murir pour la faire parvenir aux étudiants aussi pure que complète.

Je me contente de citer les têtes des équipes sans que cela diminue d'un iota du rôle de tous les autres membres, très nombreux. Si l'exiguïté du cadre en a décidé ainsi, ils sont en revanche assurés de leur place indétrônable à travers le temps dans mon cœur. Je les remémore toujours avec une affection sans borne et une reconnaissance infinie :

Mr. Youcef Atik Smail Djebali de l'ENS de Vieux-Kouba,
Mr. Cherif Bouzidi de l'ENTP de Kouba;
Mr. Brahim Kacha de l'ENP d'El Harrach;
Mr. Messaoud Djebarni de l'ENPEI de Rouiba.

0.1 Notes introductives

«Cauchy est fou, mais actuellement c'est le seul qui sache comment on doit faire des mathématiques ».

Abel, 1826.

Encore une retrouvaille pour l'étudiant fraichement débarqué du lycée que vous êtes. Les prémices de l'intégrale définie ainsi que ceux de l'intégrale indéfinie (ou primitive) ont rempli une bonne partie de la fin de votre dernier palier d'études.

La porte par laquelle la première citée a fait son entrée est géométrique. C'est la principale et la plus vieille : Pour une fonction positive bornée sur un intervalle compact, elle est, comme on vous l'a certainement entonné, la mesure de « la surface sous la courbe » de cette fonction. Même si au départ, on utilise une fonction positive, mais en fait rien n'interdit de faire la même construction pour des fonctions négatives ou de signe variable. Evidemment, il ne s'agit alors plus de calculer une aire.

Le présent cahier vous fait revisiter cette notion avec plus d'éclaircissements et d'approfondissement.

Si l'on interroge l'histoire sur le problème de l'estimation de la mesure des surfaces on est vite renseigné qu'il remonte à très loin. Des traces de calculs s'y afférant foisonnent dans les civilisations très anciennes de l'Antiquité : en Inde, en Egypte, en Grèce ou en Mésopotamie.

Néanmoins, la confirmation la plus éclatante quant à l'origine de l'intégration vient incontestablement des problèmes d'ordre géo-métrique que se posaient les Grecs : calculs d'aires, de volumes, de longueurs, de centres de gravité, de moments,…etc. A la tête des précurseurs grecs du calcul intégral de part de l'importance des travaux légués vient Archimède[1] chez qui on trouve assises certaines techniques d'approximations telles que celles consistant à découper les aires en petits rectangles ou triangles, dont les aires deviennent de plus en plus petites, et sommer ces aires ; la détermination du centre de gravité d'une surface triangulaire, le rapport entre aire et périmètre du cercle, le volume et l'aire de la sphère. Beaucoup de ces techniques ont traversé les siècles jusqu'à nous parvenir.

Il y a aussi Eudoxe[2]qui a laissé des traces rapportées par Euclide[3] sur la détermination des volumes du cône et de la pyramide.

A partir du XIème siècle de notre ère, les savants Arabes, qui ont traduit et assimilé l'héritage grec s'y inspirèrent. Ils reprennent avec minutie les travaux d'Archimède et les fructifient en les

---

1. Archimède (né 287 av. JC) : Savant Grec. Son champ de prédilection est la géométrie. Il a entre autres montré en utilisant les polygones réguliers de 69 côtés, sa fameuse approximation du nombre π :

$$\frac{223}{71} \leq \pi \leq \frac{22}{7}.$$

2. Eudoxe de Cnide (408 av. J.C - 355 av. J.C) : Philosophe et mathématicien Grec. Il a touché aussi à l'astronomie et la médecine. Contemporain de Platon il fut son assistant à son Académie d'Athènes.

3. Euclide d'Alexandrie (320 av. J.C?-260 av. J.C?) : Il est l'un des plus grands mathématiciens Grecs dont paradoxalement on ne connait pas grand-chose de sa vie. Il aurait vécu entre les IVème et IIIème siècle avant notre ère. Il est connu pour ses écrits, sur lesquels repose une grande partie des mathématiques, et notamment les célèbres « Éléments d'Euclide » portant sur la géométrie et l'arithmétique.

étendant au calcul de divers aires et volumes en usant de « sommes de Riemann[4]». Le fameux physicien et mathématicien Ibn al-Haytham[5] utilise cette méthode pour calculer, par exemple, le volume du solide de révolution obtenu en faisant tourner la partie de parabole limitée par un segment perpendiculaire à son axe autour de ce même segment.

L'apparition de la notion de fonction et d'intégrale en Europe au XVIIème siècle allait établir un lien entre la question géométrique de la mesure des aires et celle, analytique, du calcul des intégrales. Partant eux aussi du legs grec, de l'œuvre d'Archimède particulièrement, les mathématiciens de cette époque, en Europe occidentale notamment, s'attelèrent à la maitrise et l'amélioration de ce calcul et ses techniques. On peut citer parmi eux Cavalieri[6], et Torricelli[7] en Italie, Roberval[8] et Fermat[9] en France, …

La découverte du théorème fondamental :

« Si f est une fonction continue sur un intervalle I et si F est une de ses primitives alors, pour tous a et b de I on a :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a); »$$

par Newton[10] et Leibniz[11] constitue une avancée considérable dans le calcul intégral. Ce théorème va permettre, comme on le voit, des calculs pratiques d'intégrales, à l'aide de primitives

Au XIXe siècle, les études sur les développements en séries trigonométriques inaugurées par Fourier[12] vont ouvrir un grand chantier de recherche autour du calcul intégral. Les travaux de

4. Bernhard Riemann (17/09/1826-20/07/1866) : Mathématicien Allemand. En 1851, il soutient sa thèse préparée sous la direction de Gauss. Elle portrait sur la théorie des fonctions d'une variable complexe, dont il s'intéresse particulièrement aux propriétés géométriques.

5. Ibn al-Haytham (?/?/965-?/?/1039) : Physicien et Mathématicien Arabe, né en Irak et mort en Egypte. Il est considéré comme l'un des plus grands savants "Arabes". Il a son actif plusieurs ouvrages et découvertes scientifiques, en optique et géométrie notamment.

6. Bonaventura Francesco Cavalieri (?/ ?/1598-30/11/1647) : Mathématicien et astronome Italien. Ses travaux sont considérés à la base de la naissance du calcul intégral.

7. Evangelista Torricelli (15/10/1608-25/10/1647) : Mathématicien et physicien Italien. Il est connu notamment pour avoir inventé le baromètre.

8. Gilles Personne de Roberval (09/08/1602 - 27/10/1675) : Mathématicien et physicien Français. Il fut en 1666 l'un des fondateurs de l'Académie royale Française des sciences. Parmi ses ouvrages figure le Traité de mécanique. Son nom est aujourd'hui lié à sa fameuse balance qu'il présenta en 1669.

9. Pièrre de Fermat (17/08/1601-12/01/1665) : Mathématicien Français. Il est aussi magistrat et poète. Il a son actif beaucoup de résultats en algèbre et en géométrie. Son nom est plus lié à sa célèbre conjecture qui a traversé les siècles et sur laquelle se sont succédés beaucoup de grands mathématiciens: « étant donné un entier naturel n plus grand que 2 l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'admet pas de solution entière ».

10. Newton Isaac (4/1/1642 – 31/3/1727) : Mathématicien, physicien et astronome Anglais. Il est considéré comme l'un des plus grands scientifiques de tous les temps.

11. Gottfried Wilhelm Leibniz (01 /07/1646 – 14/11/1717) : Mathématicien Allemand. Il a, avec Newton, fondé le calcul différentiel. C'est à lui que reviennent beaucoup de symboles mathématiques utilisés de nos jours, dont celui de l'intégrale $\int$.

Cauchy[13] et ceux de Lebesgue[14] en particulier ont permis de surmonter un bon nombre de difficultés accumulées jusqu'alors.

Certains, à leur tête le mathématicien italien Peano[15], étaient critiques à propos de la définition de l'intégrale comme « l'aire sous la courbe », objectant que la notion même d'aire n'était pas précisément définie. Aussi, dans son ouvrage sur l'intégrabilité des fonctions en 1883, Peano donna sa propre définition de l'aire. Dans un premier temps, il définit les aires des polygones. Puis, considérant un ensemble « de forme simple » inclus dans le plan, il appela aire de cet ensemble la valeur commune de :

- La borne supérieure des polygones inclus dans l'ensemble ;
- La borne inférieure des polygones qui contiennent l'ensemble.

Si ces deux valeurs diffèrent, alors l'aire ne peut pas être définie.

Le calcul intégral a beaucoup bénéficié de l'apport du développement de la notion de limite, ce qui lui a conféré clarté et précision lesquelles manquaient du temps de Newton et Leibniz. Avec les travaux de Cauchy à la deuxième moitié du XIXème siècle, le calcul intégral a pris de l'ampleur et a fini par asseoir l'apogée de ses propriétés.

C'est Riemann qui a utilisé en premier la notion de limite dans la définition de l'intégrale. Non satisfait de la théorie de l'intégration de Cauchy portant sur les fonctions continues qui lui paraît insuffisante pour manipuler certaines séries de Fourier, il publie en 1854 une rigoureuse théorie de l'intégration pour les fonctions bornées (continues ou non) sur un intervalle fermé. Ses travaux ont achevé d'autonomiser définitivement le concept de l'intégration.

Comme dans toute théorie en général, le calcul intégral a connu des généralisations dont celles introduites dans les travaux de Lebesgue, lesquelles ont donné naissance aux premiers jalons d'une nouvelle entité mathématique : théorie de la mesure laquelle a enfanté l'intégrale de Lebesgue. Elle est suivie par d'autres théories de l'intégration. Parmi lesquelles figure celle de Stieltjes[16]. … Mais tout cela est une autre histoire …

Cinq chapitres charpentent le présent cahier.

Chapitre Premier : Intégrale de Riemann

Trois sections le composent :
Section une : Intégrale d'une fonction en escalier ;
Section deux : Intégrale de Riemann d'une fonction bornée ;
Section trois : Sommes de Riemann et formule uniforme.

---

12. Joseph Fourier (21/03/1768-16 /05/1830) : Mathématicien Français, Il étudia à l'Ecole Normale de Paris sous Lagrange et Laplace. Il enseigna à l'Ecole Polytechnique puis fut appelé à participer à l'expédition de Napoléon en Egypte. Il a publié un nombre important de travaux en mathématiques pures et appliquées.

13. Augustin Louis Cauchy (21/8/1789-22/5/1857) : Mathématicien Français. Son immense œuvre scientifique renferme plus de 800 articles sur des sujets mathématiques et physiques les plus variés. Il est à l'origine de l'analyse moderne.

14. Henri Léon Lebesgue (28/6/1875 - 26/6/1941) : Mathématicien Français. Il soutient sa thèse en 1902 sous le titre: *Intégrale, longueur, aire*. Il y présente la théorie d'une nouvelle intégrale, laquelle porte son nom de nos jours.

15. Giuseppe Peano (27/08/1858 - 20/04/1932) : Mathématicien Italien. Pionnier de l'approche formaliste des mathématiques, il développa, parallèlement à l'Allemand Richard Dedekind, une axiomatisation de l'arithmétique (1889).

16. Thomas Stieltjes (29/12/1856-31/12/1894) : Mathématicien Hollandais. le 30 juin 1886 il soutient sa these avec un travail sur les séries semi-convergentes. En fait, ses travaux portent sur toutes les branches de l'analyse et sur la théorie des nombres. Toutefois, son nom est resté célèbre de nos jours par son intégrale.

Chapitre Deuxième : Calcul de primitives

Sept sections le composent :
Section une : Définitions et propriétés générales ;
Section deux : Principales Méthodes de Calcul ;
Section trois :Quelques cas spécifiques : Primitives de fractions rationnelles ;
Section quatre : Quelques cas spécifiques : Primitives de fonctions abéliennes ;
Section cinq : Quelques cas spécifiques :Primitives de fonctions « expressions de *sinus* et *cosinus* » ;
Section six :Quelques cas spécifiques :Primitives de fractions « fonction de e^x » ;
Section sept :Quelques cas spécifiques :Primitives de fonctions « $f(x) = x^n(ax^m + b)^k$.

Chapitre Troisième : Intégrales impropres

Trois sections le composent :
Section une : Intégrales impropres de première espèce ;
Section deux :Intégrales impropres de deuxième espèce ;
Section trois : Intégrales impropres mixtes.

Chapitre Quatrième : Exercices

Trois sections le composent :
Section une : Exercices résolus ;
Section deux : Solutions ;
Section trois : Exercices Test.

Chapitre cinquième : Trois Index

Index terminologique :
Index des savants cités ;
Index bibliographique.

Pour apprécier cette marche et la rendre accessible, voire agréable, on a pas lésiné sur les moyens à même d'apporter la clarté boostant la compréhension et assurant l'assimilation. C'est dans cette optique qu'il est fait appel à beaucoup d'exemples d'illustration et exercices de consolidation dont certains résolus et d'autres laissés comme compléments pour évaluation et agrément.

En guise d'épilogue, il nous semble grandement utile, et c'est d'usage, de saisir cette tribune pour rappeler à l'étudiant que comprendre, apprendre et appliquer de nouvelles notions nécessite une ébauche d'efforts à ne plus en compter. Pour cela, il y a lieu de lui rappeler trois qualités (sonnant sociétalement parfois comme des tares) devant lui coller comme son ombre :

- S'armer d'une **curiosité** farouche pour ne laisser aucune piste pour récolter ou confronter une information en variant ses sources (enseignants, ouvrages, internet… etc.)

- Etre animé d'une **hargne** et d'un **entêtement** à même de ne lâcher aucune question sans l'élucider quelque soit l'effort physique, temporel ou matériel consenti. Ne jamais évacuer des questions en suspens sans s'y cramponner jusqu'à les mener à leur terme.

- Etre habité d'une **voracité** insatiable en s'abstenant de compter le nombre de problèmes et exercices effectués ou de livres consultés et avoir l'envie vivace de toujours en faire et consulter davantage.

Je me dois pour conclure de dire ma conviction profonde que le présent travail ne peut avoir l'impact escompté auprès de ses utilisateurs s'il ne suscite pas l'intérêt et l'adhésion de ces derniers. C'est avec leur implication par des critiques et suggestions[↓] qu'il peut s'améliorer et être plus utile.

Semmache le 07 Octobre 2015
Mohammed Hazi.

[↓] Il suffit d'un clic à cette adresse : hazi@hotmail.fr