

**Mohammed Hazi**

**De mes cahiers d'analyse ...**

**Fonctions de plusieurs variables réelles:  
Limites, continuité, différentiabilité et ...!**

**Cours détaillé et exercices résolus**

Pour le premier cycle des Universités et Grandes Ecoles.

Du même auteur à l'Office des Publications Universitaires :

1. Espaces topologiques en général et espaces métriques en particulier.
2. المختصر في الطوبولوجيا.
3. Introduction aux espaces normés.
4. السبيل إلى الأعداد الحقيقية.
5. الفالج المقروض في الامتحانات والفروض، الجزء الأول.
6. الفالج المقروض في الامتحانات والفروض، الجزء الثاني.
7. S.E.M 300 par ses Examens, tome 1.
8. S.E.M 300 par ses Examens, tome 2.
9. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 1: Visite guidée dans les espaces topologiques.
10. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 2: Visite guidée dans les espaces métriques.
11. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 3: Visite guidée dans les espaces normés.
12. مبادئ مفتاحية في مفاهيم طوبولوجية.
13. الدروس الوافية في الفضاءات المترية.
14. المقعد المجلي للتحليل الدالي.
15. من دفاتر التحليل: المتتاليات العددية.
16. من دفاتر التحليل: الدوال الحقيقية ذات متغير حقيقي: نهاياتها واستمرارها.
17. من دفاتر التحليل: الاشتقاق والنشور المحدودة لدى الدوال الحقيقية ذات متغير حقيقي: تعيد نظري وتطبيقات.
18. من دفاتر التحليل: التكامل الريماني وحساب الدوال الأصلية: شق نظري وآخر تطبيقي.
19. من دفاتر التحليل: المعادلات التفاضلية العادية من الرتبين الأولى والثانية: تعيد نظري وتطبيقات.
20. من دفاتر التحليل: الدوال ذات عدة متغيرات حقيقية: نهاياتها واستمرارها وقابليتها للمفاضلة و... دروس مفصلة وتمارين متنوعة.
21. De mes cahiers d'analyse : Tout sur  $\mathbb{R}$  : Structures algébrique et topologique. Cours détaillé et exercices résolus.
22. De mes cahiers d'analyse : Suites numériques. Cours détaillé et exercices résolus.
23. De mes cahiers d'analyse : Fonctions réelles d'une variable réelle : Limites, continuité ... Cours détaillé et exercices résolus
24. De mes cahiers d'analyse : Fonctions réelles d'une variable réelle : dérivabilité, dérivées et développements limités. Cours détaillé et exercices résolus.
25. De mes cahiers d'analyse : Intégrale de Riemann, calcul de primitives et intégrales généralisées. Cours détaillé et exercices résolus.
26. De mes cahiers d'analyse : Equations différentielles ordinaires du premier et second ordre. Cours détaillé et exercices résolus.

En traduction vers l'arabe :

1. Equations de la physique mathématique (deux tomes).
2. Cours de topologie.
3. Séries et intégrales.
4. Matrices : Cours et problèmes.
5. Problèmes et exercices résolus.
6. Introduction à la topologie générale.
7. Cours d'algèbre linéaire.
8. Algèbre linéaire.
9. Algèbre I ; Rappels de cours et exercices résolus.
10. Atlas des mathématiques.



## 0.0 Aveu de reconnaissance

Les cours exposés à travers ce septième et dernier cahier ainsi que les six déjà parus, sont le fruit de plusieurs années de participation à des staffs d'encadrement de la première année des quatre Grandes Ecoles :

Ecole Normale Supérieure de Vieux-Kouba, Alger ;  
Ecole Nationale des Travaux publiques de Kouba, Alger ;  
Ecole Nationale Polytechnique d'El Harrach, Alger ;  
Ecole Nationale de Préparation aux Etudes d'Ingénieur de Rouiba, Alger.

C'est une nouvelle belle occasion qui s'offre à moi pour dire, encore une fois, ma gratitude pour tout collègue ayant souffert le martyre avec moi au service des étudiants en général et ceux de première année en particulier. Je les salue très bas pour les efforts fournis, les sacrifices consentis et les difficultés surmontées afin de dompter la matière et la murir pour la faire parvenir aux étudiants aussi pure que complète.

Je me contente de citer les têtes des équipes sans que cela diminue d'un iota du rôle de tous les autres membres, très nombreux. Si l'exiguïté du cadre en a décidé ainsi, ils sont en revanche assurés de leur place indétronable à travers le temps dans mon cœur. Je les remémore toujours avec une affection sans borne et une reconnaissance infinie :

Mr. Youcef Atik et Smail Djebali de l'ENS de Vieux-Kouba,  
Mr. Cherif Bouzidi de l'ENTP de Kouba;  
Mr. Brahim Kacha de l'ENP d'El Harrach;  
Mr. Messaoud Djebarni de l'ENPEI de Rouiba.

## 0.1 Notes introductives

*"Une théorie mathématique ne doit être regardée comme parfaite que si elle a été rendue tellement claire qu'on peut la faire comprendre au premier individu rencontré dans la rue. »*

*David Hilbert, 1900*

Un étudiant aussi alerte que vous n'a pas besoin de justificatifs ou autres subterfuges pour être convaincu que la plus part, sinon tous les phénomènes du monde qui nous entoure sont fonctions de facteurs aussi nombreux que diverses. La vie courante en regorge.

Votre réussite dans les études n'est-elle pas tributaire de plusieurs paramètres dont l'encadrement humain et matériel, la persévérance, l'endurance, l'intelligence et ... ?

Le développement d'une plante ne repose t'il pas sur la nature du sol, les composantes de la graine, la chaleur, l'irrigation et ... ?

Une pluie peut-elle atteindre votre région sans eaux qui s'évaporent, ni des nuages qui s'accumulent et se condensent, ni des vents qui soufflent et escortent, ni ... ?

Ce livre qui est entre vos mains n'est-il pas le fruit de plusieurs aléas depuis qu'il a germé dans ma tête jusqu'à son arrivée entre vos mains ?

En langage beaucoup plus mathématique, la présence des fonctions de plusieurs variables réelles est palpable et autour de nous omniprésente. Ainsi :

- L'aire et le périmètre d'un champ rectangulaire est fonction de deux variables : sa longueur et sa largeur ;
- Le volume d'une piscine parallélépipédique est fonction de trois dimensions : longueur, largeur et hauteur;
- La température en un point d'une demeure est une fonction des trois dimensions de l'espace et de celle du temps;
- L'élévation d'un point du globe terrestre relativement à la mer est fonction des deux variables : sa latitude et sa longitude ;
- ...etc.

Bien que les fonctions de plusieurs variables réelles soient apparues avec l'avènement du 18<sup>ème</sup> siècle, elles n'ont pu consolider leur assise qu'au début du 20<sup>ème</sup> siècle. Même si la notion de dérivée partielle est connue dès la fin du 17<sup>ème</sup> siècle, les équations aux dérivées partielles, elles, ne surviennent qu'à partir de la seconde moitié du 18<sup>ème</sup> siècle à travers des problèmes de mécanique. Euler<sup>1</sup> et Clairaut<sup>2</sup> en sont les pères fondateurs. Ils ont étudié ce qui aujourd'hui est appelé la différentielle totale des fonctions de deux variables :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy.$$

- 
1. Leonhard Euler (15/4/1707-18/9/1783) : Mathématicien suisse. Il est reconnu pour être le plus prolifique de tous les temps. Il est le père des symboles, aujourd'hui usuels ;  $f(x)$  pour la fonction (1734),  $e$  pour la base des logarithmes (1727),  $i$  pour la racine carrée de  $-1$  (1777) et  $\pi$  pour le nombre pi (1755) et beaucoup plus encore ...
  2. Alexis-Claude Clairaut (13/5/1713-17/5/1765) : Mathématicien français. Il est avec Euler, l'un des précurseurs à utiliser les dérivées partielles.

Le symbole de la dérivation partielle est utilisé pour la première fois en 1770 par Condorcet<sup>3</sup>, dans un mémoire sur les équations aux dérivées partielles. Il est repris par Legendre<sup>4</sup> en 1786. Ce dernier ne tarda pas à l'abandonner. Son utilisation fut reprise en 1841 par Jacobi<sup>5</sup>.

Les équations aux dérivées partielles du premier ordre ne connurent leur étude globale complète qu'aux alentours de 1770.

Au 18<sup>ème</sup> siècle, et devant des problèmes surgis en mécanique des corps déformables et en théorie d'élasticité, les dérivées partielles du second ordre firent leur apparition. C'est le cas de façon particulière, lors de l'étude de l'équation des cordes vibrantes, de l'équation de propagation de la chaleur, lesquelles sont à l'origine de la naissance des séries de Fourier<sup>6</sup>.

C'est à Jacobi que revient le mérite de la suggestion du symbole usité de nos jours pour les dérivées partielles mixtes  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ .

En 1873, Schwarz<sup>7</sup> a prouvé que la formule  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ , célèbre dans la culture mathématique sous le théorème ou critère de Schwarz, est vérifiée si l'un de ses membres est continu par rapport à l'ensemble des variables. Dans ce contexte, Peano<sup>8</sup> a présenté la fonction traitée dans la remarque (7.1.2) :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour objecter que cette formule est mise en défaut en l'absence de la continuité signalée. Plus précisément, il est en général faux d'invertir les opérations de dérivation partielle en l'absence de la continuité des dérivées partielles ...

Laissons-là cette histoire !

Le présent cahier tourne autour de trois chapitres, six planches d'exercices dont trois sont résolues et trois index.

- 
3. Marie Jean Antoine de Condorcet (17/9/1743-29/3/1794) : Philosophe et mathématicien français. Il est célèbre pour ses travaux précurseurs en probabilités et statistiques, ainsi que pour ses activités politiques avant et pendant la révolution française.
  4. Adrien-Marie Legendre (18/9/1752-10/1/1833) : Mathématicien français. Son majeur travail était sur les fonctions elliptiques, publié sous le titre: *Exercices du Calcul Intégral*.
  5. Carl Gustav Jacobi (10/12/1804-16/2/1851) : Mathématicien allemand. Il a touché à plusieurs domaines. Il est l'auteur d'importantes découvertes, en théorie des nombres notamment. Il a laissé un célèbre mémoire sur les déterminants.
  6. Joseph Fourier (21/3/1768-16/5/1830) : Mathématicien français. Ancien normalien sous Lagrange et Laplace, il entama sa carrière comme enseignant à l'Ecole Polytechnique de Paris avant de se lancer avec Napoléon dans son expédition en Egypte. Il publia un nombre important d'articles tant en mathématiques pures qu'appliquées.
  7. Hermann Amandus Schwarz (25/1/1843-30/11/1921) : Mathématicien autrichien. Il a d'abord étudié la chimie, puis, sous l'influence de Weierstrass, les mathématiques. Son nom est lié pour la postérité à son inégalité sur les intégrales.
  8. Giuseppe Peano (27/8/1858-20/4/1932) : Mathématicien italien. Son intérêt a porté sur la logique et la construction formelle d'êtres mathématiques. Il est le premier à utiliser les symboles de réunion et d'intersection.

## Chapitre Premier : Limites et continuité

Quatorze sections le charpentent :

Section une: Généralités sur les fonctions  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ .

Section deux: Structure topologique de l'espace  $\mathbb{R}^n$  : La norme.

Section trois : Structure topologique de l'espace  $\mathbb{R}^n$  : Le voisinage.

Section quatre : Structure topologique de l'espace  $\mathbb{R}^n$  : Equivalence des normes.

Section cinq : Suites de  $\mathbb{R}^p$  : Généralités.

Section six : Suites de  $\mathbb{R}^p$  : Résultats fondamentaux.

Section sept : Limites de fonctions  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  : Généralités.

Section huit : Limites de fonctions  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  : Théorèmes fondamentaux.

Section neuf : Limites de fonctions  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  : limites successives et changement de variables.

Section dix : Fonctions  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  : Limites.

Section onze : Fonctions  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  : Continuité.

Section douze : Exercices résolus.

Section treize : Solutions.

Section quatorze : Exercices Test.

## Chapitre Deuxième : Dérivabilité partielle et différentiabilité

On y trouve :

Section une : Dérivabilité partielle des fonctions  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Section deux : Dérivabilité partielle des fonctions  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ .

Section trois : Différentiabilité des fonctions  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Section quatre : Différentiabilité des fonctions  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ .

Section cinq : Différentiabilité des fonctions composées  
changements de variables.

Section six : Fonctions implicites.

Section sept : Exercices résolus.

Section huit : Solutions.

Sectionneuf : Exercices Test.

## Chapitre Troisième: Développement de Taylor et extrema

Six sections le composent :

Section une : Développement de Taylor.

Section deux : Extrema libres.

Section trois : Extrema liés.

Section quatre : Exercices résolus.

Section cinq : Solutions.

Section six : Exercices Test.

Pour apprécier cette marche et la rendre accessible, voire agréable, on a pas lésiné sur les moyens à même d'apporter la clarté boostant la compréhension et assurant l'assimilation. C'est dans cette optique qu'il est fait appel à beaucoup d'exemples d'illustration et exercices de consolidation dont certains résolus et d'autres laissés comme compléments pour évaluation et agrément.

En guise d'épilogue, il nous semble grandement utile, et c'est d'usage, de saisir cette tribune pour rappeler à l'étudiant que comprendre, apprendre et appliquer de nouvelles notions nécessite

une ébauche d'efforts à ne plus en compter. Pour cela, il y a lieu de lui rappeler trois qualités (sonnant socialement parfois comme des tares) devant lui coller comme son ombre :

- S'armer d'une **curiosité** farouche pour ne laisser aucune piste pour récolter ou confronter une information en variant ses sources (enseignants, ouvrages, internet... etc.)

- Etre animé d'une **hargne** et d'un **entêtement** à même de ne lâcher aucune question sans l'élucider quel que soit l'effort physique, temporel ou matériel consenti. Ne jamais évacuer des questions en suspens sans s'y cramponner jusqu'à les mener à leur terme.

- Etre habité d'une **voracité** insatiable en s'abstenant de compter le nombre de problèmes et exercices effectués ou de livres consultés et avoir l'envie vivace de toujours en faire et consulter davantage.

Je me dois pour conclure de dire ma conviction profonde que le présent travail ne peut avoir l'impact escompté auprès de ses utilisateurs s'il ne suscite pas l'intérêt et l'adhésion de ces derniers. C'est avec leur implication par des critiques et suggestions<sup>↓</sup> qu'il peut s'améliorer et être plus utile.

Tikjda 27 Mars 2016  
Mohammed Hazi.

---

<sup>↓</sup>Il suffit d'un clic à cette adresse : [mohammed.hazi1979@gmail.com](mailto:mohammed.hazi1979@gmail.com)