Mohammed Hazi

Au carrefour des examens de topologie

Problèmes et exercices résolus

Pour les deuxièmes et troisièmes années des universités et Grandes Ecoles Scientifiques.

Du même auteur à l'Office des Publications Universitaires :

1. Espaces topologiques en général et espaces métriques en particulier.
2. المختصر في الطبولوجيا.
3. Introduction aux espaces normés.
4. السبيل إلى الأعداد الحقيقيّة.
5. الفالج المقروض في الامتحانات والفروض، الجزء الأوّل.
6. الفالج المقروض في الامتحانات والفروض، الجزء الثاني.
7. S.E.M 300 par ses Examens, tome 1.
8. S.E.M 300 par ses Examens, tome 2.
9. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 1: Visite guidée dans les espaces topologiques.
10. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 2: Visite guidée dans les espaces métriques.
11. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 3: Visite guidée dans les espaces normés.
12. مبادئ مفتاحيّة في مفاهيم طبولوجيّة.
13. الدروس الوافية في الفضاءات المتريّة.
14. المقعّد المجلّي للتحليل الداليّ.
15. من دفاتر التحليل: المتتاليات العدديّة.
16. من دفاتر التحليل: الدوال الحقيقيّة ذات متغيّر حقيقيّ: نهاياتها واستمرارها.
17. من دفاتر التحليل: الاشتقاق والنشور المحدودة لدى الدوال الحقيقيّة ذات متغيّر حقيقيّ: تقعيد نظريّ وتطبيقات.
18. من دفاتر التحليل: التكامل الريماني وحساب الدوال الأصليّة: شقّ نظريّ وآخر تطبيقيّ.
19. من دفاتر التحليل: المعادلات التفاضلية العادية من الرتبتين الأولى والثانية: تقعيد نظريّ وتطبيقات.
20. من دفاتر التحليل: الدوال ذات عدّة متغيّرات حقيقيّة: نهاياتها واستمرارها وقابليتها للمفاضلة و... دروس مفصّلة وتمارين منوّعة.
21. De mes cahiers d'analyse : Tout sur $\mathbb{R}$: Structures algébrique et topologique. Cours détaillé et exercices résolus.
22. De mes cahiers d'analyse : Suites numériques. Cours détaillé et exercices résolus.
23. De mes cahiers d'analyse : Fonctions réelles d'une variable réelle : Limites, continuité … Cours détaillé et exercices résolus.
24. De mes cahiers d'analyse : Fonctions réelles d'une variable réelle : dérivabilité, dérivées et développements limités. Cours détaillé et exercices résolus.
25. De mes cahiers d'analyse : Intégrale de Riemann, calcul de primitives et intégrales généralisées. Cours détaillé et exercices résolus.
26. De mes cahiers d'analyse : Equations différentielles ordinaires du premier et second ordre. Cours détaillé et exercices résolus.
27. De mes cahiers d'analyse : Fonctions de plusieurs variables réelles : Limites, continuité, différentiabilité, … Cours détaillé et exercices résolus.

En traduction vers l'arabe :

1. Equations de la physique mathématique (deux tomes).
2. Cours de topologie.
3. Séries et intégrales.
4. Matrices : Cours et problèmes.
5. Problèmes et exercices résolus.
6. Introduction à la topologie générale.

7. Cours d’algèbre linéaire.
8. Algèbre linéaire.
9. Algèbre I ; Rappels de cours et exercices résolus.
10. Atlas des mathématiques.

Aux ames des chers êtres disparus de ma famille :
Mon père, Nanna, Lalla et mon frère Dahmane!

Notes introductives

Les espaces compacts sont pour la topologie générale ce que sont les espaces finis pour la théorie des ensembles.

Jean Dieudonné.

Les sujets ramenés ici proviennent dans leur grande majorité du stock d'examens dispensés au département de mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure de Kouba lors des dix dernières années. Ils concernent le module M 216, (plus connu des étudiants sous le sobriquet de « topologie »,) des diplômes des professeurs des enseignements secondaire et Moyen. Néanmoins, le cadre s'y prêtant, on a jugé utile d'injecter quelques autres sujets dénichés ça et là. Bien plus, nous ne sommes pas empêchés de concocter quelques exercices et problèmes hors stock et qui auraient pu faire objet d'examens. Cela ne peut qu'auréoler le livre et réjouir l'utilisateur d'autres horizons comme notamment celui poursuivant les modules d'Analyse 3 et 4 des licences de mathématiques du système LMD.

Ces examens sont agencés suivant l'avancement dans le programme que voici :

Espaces métriques :
Distance
Boule
Ouvert
Topologie …
Suites de Cauchy
Espace de Fréchet
Continuité uniforme
Précompacité …
Connexité …
Convergence simple, uniforme …
… … … …

Espaces topologiques :
Topologie …
Ouvert …
Fermé …
Base …
Voisinage …
Intérieur …
Adhérence …
Frontière …
Convergence …
Continuité …
Homéomorphisme
Compacité …
Connexité …

Espaces normés :
Norme, Boule, Ouvert, Base, Topologie, Espaces de Banach, Espaces normés de dimensions finies, Espace normé des applications linéaires, Espaces de Hilbert, Orthogonalité, Projection orthogonale, Séries de Fourier … …

A l'Ecole Normale Supérieure de Kouba, le nombre annuel d'examens est en général de quatre dont trois fondamentaux d'évaluation trimestrielle et un quatrième, dit de rattrapage, pour les étudiants recalés lors de la première session. Ce nombre est parfois revu à la hausse pour inclure un cinquième pour les étudiants absents avec justificatifs à l'une des trois premières épreuves.

Ceux sont des épreuves dont la durée varie d'une heure trente au minimum à deux heures au maximum.

Le premier examen concerne essentiellement les notions fondamentales des espaces topologiques tels que retracées ci-dessus. Le second couvre les dernières notions de la première partie et les premières de la seconde partie du programme. Le troisième prend en charge la troisième partie.

Enfin, le quatrième est sensé être une synthèse en recouvrant des notions prises du programme dans sa globalité.

Ainsi, trois étals sont échafaudés pour les présenter : Un étal topologique de 28 sujets englobant 97 exercices, un étal métrique de 14 sujets totalisant 46 exercices et un étal normé de 21 sujets avec 67 exercices.

Bien entendu, pour assurer cette répartition au demeurant pratique pour l'utilisateur, nous avons procédé à la recomposition de certains examens à cheval sur deux étals (le premier avec le second et le second avec le troisième) pour qu'ils ne concernent que les notions de l'étal où ils interviennent. Ils sont systématiquement défaits et leurs contenus injectés dans des sujets annexes incorporés dans les trois premières catégories afin de garder l'ordre chronologique des notions qu'ils traitent. Nous avons dans cette action veillé autant que faire se peut, à assurer aux sujets concernés leur équilibre en termes de difficultés notionnelles et de durées temporelles.

Il est bien assis dans le monde d'apprentissage, celui des mathématiques notamment, que refaire les examens passés est un outil d'une efficacité insoupçonnée et une méthode autrement plus bénéfique, ayant fait ses preuves dans la préparation des examens à venir, contribuant par là à consolider l'autonomie de l'utilisateur dans son amorce de nouvelles démonstrations. Cela, les étudiants ne l'ignorent pas ! Ne les a-t-on pas conseillés de faire de la curiosité une de leur grande qualité à même d'élargir leurs horizons.

C'est armé de cette conviction que nous avons puisé l'énergie nécessaire pour revisiter les stocks d'examens de la dernière décennie, les trier puis les réorganiser et détailler leurs solutions.

Même si le titre suggère qu'il est destiné à la révision et la préparation et donc suppose une avancée dans le programme, on conseille qu'on peut l'utiliser et le rentabiliser dès l'entame du programme en se limitant chaque fois aux questions supportant les notions traitées en cours. Il va de soi que l'utilisateur ne peut tirer profit de ce livre et le rentabiliser qu'une fois armé de son cours (définitions, propriétés, théorèmes…etc.). Les solutions, même ramenées avec minutie et moult détails, sont toujours à prendre à titre indicatif. L'étudiant doit toujours chercher à se surpasser pour les dépasser en pondant de meilleures.

Enfin, il n'est plus à prouver qu'un livre ne peut espérer vivre et durer, aussi grands soient le soin et l'attention apportés par son auteur, qu'avec l'aide du public pour lequel il est destiné. Il vit en osmose avec lui. Tout en y puisant des apports pour sa formation, ce public peut lui rendre la meilleure en signalant[↓] toutes sortes d'erreurs le ternissant ou autres anomalies l'obscurcissant.

Semmache le 3 Mars 2017
Mohammed Hazi.

[↓] Il suffit d'un clic à cette adresse : mohammed.hazi@gmail.com.

Un mot sur le mot « topologie »

Qui parmi le nouveau publique fraichement débarqué de la première année universitaire, toutes spécialités confondues, n'a pas eu à traiter la notion de limite d'une fonction réelle d'une variable réelle en un point? Il est fort à parier que le symbole $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$ est le plus récurrent dans les réponses à la question traitant cette notion. Si on lui demande qu'a-t-il compris ou retenu de la définition de cette limite, une multitude de réponses fuserait parmi lesquelles:

$f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a (sans l'atteindre).

Des variantes au verbe tendre font légion aussi : s'approcher, aller vers, être près de , petit, très petit, grand, très grand, …

Ales regarder de près, un étudiant attentif se rendrait très vite compte que ces termes sont pour le moins approximatifs sinon inappropriés. Cela ne peut être autrement puisque notre étudiant est armé de la caractéristique fondamentale des nombres réels stipulant qu'entre deux réels existent une infinité d'autres réels. Que signifie alors dans ce cadre qu'un réel est proche d'un autre ! Comment peut prétendre tendre vers zéro celui qui est par avance convaincu qu'à chaque pas fait vers zéro, une infinité de nombres l'en sépare !

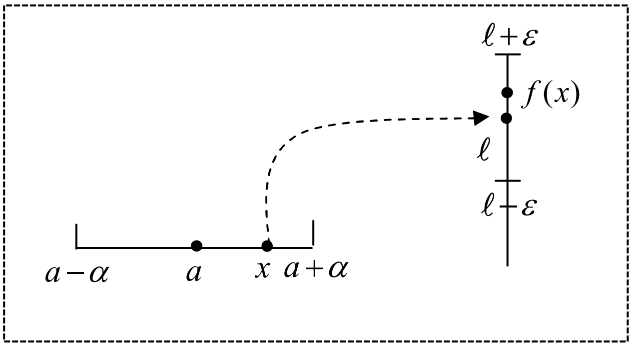
Si l'on reprend cette notion en faisant intervenir ∞ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$, par exemple, la situation devient intenable, puisque ∞ n'est même pas localisable et donc il serait incongru de prétendre s'approcher d'un lieu dont on ignore d'avance l'emplacement…

Quelle attitude tenir alors ? Un début de réponse réside, et comme toujours, dans un retour attentif à la définition. Celle-ci indique :

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\rho(\varepsilon,x_0)>0\ /\ \forall x\in D_f:\ 0<|x-x_0|\le\rho\ \Rightarrow\ |f(x)-\ell|\le\varepsilon,$$

ou :

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\rho(\varepsilon,x_0)>0\ /\ \ \forall x\in D_f:\ x\in\,]a-\rho,a+\rho[\ \ \Rightarrow\ \ f(x)\in\,]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[.$$



Autrement dit, ℓ est une limite de f quand x tend vers a si elle satisfait à la condition suivante :

Quel que soit l'intervalle ouvert I_ℓ centré en ℓ il existe un intervalle ouvert I_a centré en a tel que $f(I_a\cap D_f)\subset I_\ell$.

En convenant d'appeler les intervalles I_ℓ et I_a **voisinage** de ℓ et a respectivement on lit finalement :

ℓ est la limite de f en a si pour tout voisinage I_ℓ de ℓ il existe un voisinage I_a de a tel que l'image de tout point x de I_a (en lequel f est définie) est dans I_ℓ.

L'un des avantages didactiques de cette formulation est qu'elle éloigne les termes inappropriés précédemment cités dans le sillage de la notion de limite et libère celle-ci de son sens courant usité dans la vie courante que colporte l'étudiant avec lui.

Cette approche géométrique est intuitivement ce que véhicule le mot « topologie ». Le rôle fondamental de celle-ci est l'étude des lieux et positions des points, les uns par rapport aux autres, sans tenir compte d'aucun autre attribut, comme leur nombre, leurs formes, … etc. D'ailleurs, on retrouve ce sens véhiculé étymologiquement dans sa dénomination elle-même. C'est du grec « topos » signifiant lieu et « logos » : étude ! ...